PRZYCZYNEK

DO TEORYI RUCHÓW CIECZY LEPKICH ZWŁASZCZA ZAGADNIEŃ DWUWYMIAROWYCH

NAPISAŁ

M. SMOLUCHOWSKI

(Z 5 rycinami w tekscie)

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1907.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 2. Dział A.

Ogólnego zbioru tom 42 A.

L. Marchlewski: Ze studyów nad chlorofilem (1 tabl.) str. 1—6). — M. Strzelecka: Przyczynek do znajomości homologów desoksybenzoiny (str. 7—10). — A. Korczyński: O działaniu bromu na durol, pięciometylobenzol i sześciometylobenzol (str. 11—21). — A. Witkowski: Spostrzeżenia nad elektrycznością atmosferyczną w Zakopanem (3 ryc.) (str. 22—27). — Wł. Natanson: O rozchodzeniu się małych ruchów w płynach lepkich (str. 28—44). — S. Kępiński: O całkach rozwiązań równań różniczkowych, rzędu drugiego, z sobą sprzężonych (str. 45—96.) — Wł. Natanson: O przewodnictwie cieplnem poruszającego się gazu (str. 70—77). — L. Bruner: O mechanizmie katalitycznego działania jodu na bromowanie (Studya dynamiczne nad bromowaniem ciał aromatycznych. Cz. III) (str. 78—98). — T. Godlewski: O ciśnieniu osmotycznem niektórych roztworów, obliczonem na podstawie sił elektromotorycznych ogniw koncentracyjnych (2 tabl.) (str 99—116). — S. Niementowski: Amidynowe pochodne bezwodnika antranilowego (str. 117—137). — L. Bier i L. Marchlewski: Studya nad barwikami roślinnymi i zwierzęcymi. I. Absorbcya promieni ultrafioletowych przez barwiki żółciowe i proteinochrom (4 tabl. i 2 ryc.) (str. 138—150). — A. Korczyński i L. Marchlewski: Studyum nad izatyną (3 tabl.) (str. 151—169). — K. Żorawski: O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materyalnych punktów. Część druga (str. 170—211). — K. Żorawski: Uwaga o pochodnych nieskończenie wielkiego rzędu (str. 212—215). — W. Syniewski: O budowie skrobi (10 rycin w tekscie) (str. 216—262). — W. Syniewski: O działaniu formaldehydu na skrobię i o połączeniu jodu z amylodekstryną (1 tabl.) (str. 263—271). — E. Kraft: Badania doświadczalne nad skalą barw interferencyjnych (1 ryc. i 4 tabl.) (str. 272—323). — W. Baczyński i S. Niementowski: Studya nad bromowaniem benzimidazolów (str. 324—391). — K. Zakrzewski: O oscylacyi krążka w płynie lepkim (str. 392—398). — Wł. Natanson: O funkcyi dysypacyjnej płynów lepkich (str. 399—404). — Wł. Natanson: O odkształcaniu krążka plastyczno-lepkiego (str. 405—423). — St. Bądzyński i K. Panek: O kwasie alloksyproteinowym prawidłowym składniku moczu ludzkiego (str. 424—432). — J. Zaleski: Badania nad mezoporfiryną (str. 433—451). — S. Niementowski: O kwasie chloraldwuantranilowym (str. 452—456). — K. Olszewski: Przyrządy do skroplenia powietrza i wodoru (str. 457—470). — L. Marchlewski: Przyczyna bierności optycznej wodnych roztworów kwasu antiwinowego (str. 471—472).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 3. Dział A.

Ogólnego zbioru tom 43 A.

Br. Pawlewski: O działaniu chlorku tionylu na oksimy i własnościach kamferonitrylu (str. 1—7). — D. Russjan: Kilka twierdzeń z teoryi wyznaczników str. 8—13). — St. Zaremba: Uwagi o pracach Profesora Natansona nad teoryą tarcia wewnętrznego (str. 14—21). — K. Dziewoński: O dekacyklenie (trójnaftylenbenzolu) nowym węglowodorze i czerwonym związku siarkowym dwunaftylentiofenie (str. 22—38). — S. Zaremba: O metodach średniej arytmetycznej Neumanna i Robina w przypadku, gdy ograniczenie nie jest spójne (str 39—70). — M. Smoluchowski: O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z nimi objawach cieplnych (str. 71—106). — M. Smoluchowski: Przyczynek do teoryi endosmozy elektrycznej i kilku zjawisk pokrewnych (str. 110—127). — R. Załoziecki: O nitrowaniu niżej wrzących frakcyj ropy galicyjskiej (str. 128—137). — B. Pawlewski: Bezpośrednia synteza α-fenylobenzimidazolu (str. 138—141). — K. Olszewski: Nowy przyrząd do skraplania wodoru (1 ryc.) (str. 142—147). — J. Puzyna: O sumach nieskończenie wielu szeregów potęgowych i o twierdzeniu Mittag-Lefflera z teoryi funkcyi (str. 148—178). — Wł. Natanson: O zastosowaniu równań Lagrange'a w teoryi tarcia wewnętrznego (str. 179—194). — Wł. Natanson: O stopniu przybliżenia pewnych równań w teoryi tarcia wewnętrznego (str. 195—222). — St. Zaremba: O pewnem uogólnieniu klasycznej teoryi tarcia wewnętrznego (str. 223—246). — St. Zaremba: O pewnem zagadnieniu hydrodynamiki będącem w związku ze zjawiskiem podwójnego załamania światła w cieczach odkształcanych i rozbiór pracy prof. Natansona o tym przedmiocie

PRZYCZYNEK

DO TEORYI RUCHÓW CIECZY LEPKICH ZWŁASZCZA ZAGADNIEŃ DWUWYMIAROWYCH

NAPISAŁ

M. SMOLUCHOWSKI

(Z 5 rycinami w tekscie)

KRAKÓW
NAKŁADEM AKADEMII UMIEJĘTNOSCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI SPÓŁKI WYDAWNICZEJ POLSKIEJ
1907.

Osobne odbicie z tomu XLVII. Seryi A. Rozpraw Wydziału mat.-przyr.
Akademii Umiejętności w Krakowie.

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem J. Filipowskiego.

Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych

przez

M. Smoluchowskiego.

(Z 5 rycinami w tekscie).

Wniesiono na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. d. 7 stycznia 1907; ref. czł. Natanson.

I. Warunki służące do określenia ruchu.

§ 1. Wiadomo, że według badań [1]) Helmholtza, Kortewega i Rayleigha równania określające t. zw. „powolny“ ruch stateczny cieczy lepkich, mianowicie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \nabla^2 u \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu \nabla^2 v \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \nabla^2 w \end{aligned} \tag{1}$$

nie posiadają więcej nad jedną całkę, zgodną z warunkami ciągłości i spełniającą warunek, ażeby prędkości u, v, w przybrały dane wartości na powierzchni obrębu badanego. Jeżeli zatem znaleziono rozwiązanie zadość czyniące owym warunkom, wiemy, że jest to jedyne możliwe rozwiązanie.

---

[1]) Helmholtz, Wissensch. Abh. I, p. 223,
Korteweg, Phil. Mag. 16, p. 112 (1883),
Rayleigh, Phil. Mag. 36, p. 354 (1893).

Chcąc jednak na tej podstawie dobrać takie zadania matematyczne, któreby odpowiadały problematom praktyki, napotyka się na pewne trudności.

Przedewszystkiem zauważyć trzeba, że wspomniane przedtem dowody jednoznaczności nie są ogólne, bo są związane z milcząco przyjętem założeniem, że obręb S, na którego powierzchni dane są owe prędkości, nie sięga do nieskończoności. Mianowicie polegają one na tem, że całka kształtu $\int F ds$ zniknąć musi wskutek zniknięcia wielkości F w owej powierzchni S, podczas gdy tego rozumowania nie można stosować w razie nieskończenie wielkiej powierzchni S, w której $\lim_{\infty} F = 0$. Istotnie poznamy też później różne przykłady ruchów (§ 9, § 11), spełniających warunek $\lim_{\infty} u = \lim_{\infty} v = \lim_{\infty} w = 0$, (podczas gdy jedyne rozwiązanie zgodne z nieruchomością cieczy na ścianach naczynia zamkniętego, o rozmiarach skończonych, jest stan zupełnego spoczynku), co dowodzi, że owe twierdzenie w tym razie nie jest prawdziwe.

§ 2. Po drugie zauważymy typowy sposób, którym w praktyce doświadczalnej wytwarzamy ruch przybliżenie stateczny cieczy lepkiej, polega na tem, że włączamy dany przewód między dwa zbiorniki, w których utrzymujemy różne ciśnienia hidrostatyczne. Doświadczenie uczy, że wtedy przy danym kształcie przewodu ruch jest zupełnie określony, że zależy tylko od różnicy ciśnień wywieranych na powierzchnię cieczy w zbiornikach, nie zaś od kształtu i rozmiarów tychże, jeżeli są dostatecznie wielkie.

Nasuwa się zatem pytanie, czy owym warunkom fizycznej jednoznaczności odpowiada jednoznaczność odnośnego zadania teoretycznego, to znaczy: czy i kiedy podanie tej jednej wielkości, t. j. rozkładu ciśnienia, na miejscu owych trzech prędkości może wystarczyć do teoretycznego określenia ruchu.

W ogólnym przypadku podanie samego ciśnienia oczywiście nie jest dostateczne, wystarczy zaś podanie trzech natężeń p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}, działających na powierzchnię S, jeżeli S jest skończone, jak łatwo poznać z później przytoczonego wzoru (2).

§ 3. W razie obszaru S nieskończonego zaś można łatwo dowieść twierdzenia, które objaśnia kwestye wyżej poruszone: Dany układ natężeń (skończonych) p_{xn}, p_{yn}, p_{zn}, działających w nieskończonej odległości, powodować może w naczyniu danem tylko jeden

ruch „skończony". „Skończonym" nazywamy tutaj taki ruch, który nie tylko nigdzie nie jest nieskończenie prędki, ale dla którego całkowita ilość cieczy, przepływającej przez powierzchnię S — biorąc wszędzie bezwzględną wartość prędkości — pozostaje skończoną, gdy S rozszerza się w nieskończoność.

To znaczy:

$$\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS = G\,.$$

Pewien specyalny przypadek ruchu skończonego, odpowiadający właśnie przykładom w praktyce się nasuwającym, jest ruch który nazwaćby można: „diafragmowy", mianowicie ruch, którego linie prądu sięgać mogą wprawdzie do nieskończoności, ale tak, że żadna z nich nie przebiega całkowicie w nieskończonej odległości. W takim razie bowiem każde włókno prądu w tym obrębie, gdzie się znajduje w skończonej odległości, może zostać przecięte przekrojem q tak, że suma ich Σq będzie skończona. Dlatego też ilość przepływająca przez te przekroje: $\Sigma (v)\, q = F$ będzie skończona, i z powodu stałości iloczynu $v q$ wzdłuż włókna prądu:

$$\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS \leqq 2\, F.$$

W razie jeżeli niema linii prądu zamkniętych, lecz wszystkie sięgają z ∞ do ∞, znak równości będzie ważny (n. p. § 7).

§ 4. Przedewszystkiem udowodnić łatwo, że żaden taki ruch skończony nie może powstać, jeżeli owe ciśnienia działające w nieskończoności są zero. Wypływa to z równania wyrażającego równoważność pracy wykonanej przez ciśnienia działające na powierzchnię cieczy i energii rozprószonej wskutek lepkości:

$$\int\int [p_{xn}\, u + p_{yn}\, v + p_{zn}\, w]\, dS = \mu \int\int\int \Phi\, dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

Równanie to, w którem Φ oznacza funkcyę dysypacyjną [1]):

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

wynika z podstawienia wielkości:

---

[1]) Zob. n. p. Lamb, Hydrodynamics, p. 541 (1906).

$$
\begin{aligned}
p_{xn} = p_{xx}\, l + p_{xy}\, m + p_{xz}\, n = p\, l - \\
\qquad (3) \qquad - \mu \left[2\, l \frac{\partial u}{\partial x} + m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}
$$

i tym podobnych i z całkowania częściowego przy użyciu równań (1).

Całka powierzchniowa obejmuje zewnętrzną powierzchnię obszaru S, oraz ściany ograniczające ruch cieczy i wszystkie powierzchnie, gdzie u, v, w lub ich pochodne doznają nieciągłości. Takich powierzchni jednak we wnętrzu cieczy lepkiej być nie może z oczywistych powodów mechanicznych; jedynie na ścianach naczynia, a tam tylko w pewnych punktach lub liniach, n. p. na krawędziach matematycznie ostrych, tego rodzaju nieciągłości są dopuszczalne. Wtedy jednak musi być spełniony warunek, że wartość pracy wykonanej przez natężenia na powierzchnię, otaczającą owe punkty lub linie, redukują się do wartości zero, gdy ta powierzchnia kurczy się do zera, gdyż krawędź czy ściana nieruchoma nie może wykonać żadnej pracy. Bierzemy w rachubę tylko takie z pośród możliwych całek równań hidrodynamicznych (1), które odpowiadają tym warunkom ciągłości, gdyż tylko one mogą mieć bezpośrednie znaczenie fizyczne.

W równaniu (2) ta część całki powierzchniowej, która odnosi się do ścian nieruchomych, oczywiście nie przyczynia się do wartości pracy z powodu przylegania cieczy, t. j. $u = v = w = 0$. Pozostają składniki pochodzące od części powierzchni S położonych wewnątrz cieczy. Bezwzględna wartość ich jest oczywiście mniejsza od iloczynu wielkości G (określonej w § 3) przez największe wartości natężeń p_{xn}.... i t. d. panujące na S. Te jednak dążą do zera, gdy odsuwamy S do nieskończoności, wskutek czego znika całka z lewej strony równania. Zatem funkcya dyssypacyjna Φ będzie równa zeru, co wymaga, ażeby wszędzie było: $u = v = w = 0$.

Ponieważ dla ruchów powolnych (1) ważne jest prawo superpozycyi, więc w znany sposób możemy dalej argumentować: gdyby przy danym rozkładzie natężeń p_{xn}... dwa różne ruchy skończone u, v, w, u', v', w', były możliwe, wtedy różnice $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$, musiałyby stanowić ruch wytworzony przez znikająco małe ciśnienia, a zatem wogóle znikający, jak właśnie pokazaliśmy.

Twierdzenie o jednoznaczności ruchów skończonych, przez podanie rozkładu trzech ciśnień w nieskończoności działających, jest zatem udowodnione.

§ 5. Rozważmy jeszcze bliżej rodzaj ruchu cieczy w nieskończoności. Powstanie ruchu skończonego, wskutek skończonych ciśnień działających w nieskończoności, wymaga ażeby naczynie, w którem ruch się odbywa, posiadało w nieskończoności przekrój nieskończenie wielki.

Ażeby określić pojęcie przekroju, wykreślmy z początku spółrzędnych kulę o promieniu R; przez „przekrój" rozumieć będziemy ową część jej powierzchni, którą wycinają z niej ściany naczynia. Otóż wyobraźmy sobie, że przekrój $\lim\limits_{\infty} S$ jest skończony. W takim razie mamy dwie możliwości do rozważania. Albo prędkości w nieskończoności są nieskończenie małe, wtedy cała praca, wykonywana przez ciśnienia jest znikająco mała, więc według (2) Φ musi wszędzie zniknąć, co pociąga za sobą: $u = v = w = 0$. Albo owe prędkości, a zatem także praca byłyby skończone; ale nie zgadza się z tem, że wtedy Φ wskutek skończoności pochodnych $\frac{\partial u}{\partial x}$ i t. d. musiałoby być różne od zera, zatem $\int\int\int \Phi\, dv$ nieskończenie wielkie. Wynika zatem konieczność przekroju $\lim\limits_{\infty} S$ nieskończenie wielkiego.

Wskutek tego zaś „skończoność" ruchu wymaga, ażeby prędkość w nieskończoności była znikająco małą, jak $\frac{1}{R^2}$ w przypadku trójwymiarowym, a jak $\frac{1}{R}$ w dwuwymiarowym (z możliwym wyjątkiem pewnych punktów osobliwych). W ogólności zatem także pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$ i t. d. będą tam znikająco małe, co zresztą także wynika ze skończoności całki $\int\int\int \Phi\, dv$. Z równań (3) wnioskujemy zatem że:

$$\lim_{\infty} p_{xy} = \lim_{\infty} p_{yz} = \lim_{\infty} p_{xz} = 0; \quad \lim_{\infty} p_{xx} = \lim_{\infty} p_{yy} = \lim_{\infty} p_{zz} = p.$$

W ogólności zatem wystarczy dla zupełnego określenia ruchów skończonych a sięgających do nieskończoności, podanie jednej wielkości, t. j. rozkładu ciśnienia hidrostatycznego p, które działa w nieskończonej odległości, i to wyjaśnia kwestye w § 2 poruszane.

Ruchy dwuwymiarowe.

§ 6. W przeciwstawieniu do wielkiej liczby badań nad dwuwymiarowymi ruchami cieczy *idealnych*, mało dotychczas zajmowano się takimi ruchami cieczy *lepkich*, choć one są ciekawsze z punktu widzenia fizycznego. Zdaje się, że „transpiracya" cieczy między płaszczyznami równoległemi, wirujący ruch cieczy między walcami współosiowymi i pewne ruchy wewnątrz koła, badane przez Rayleigha [1]) metodą źródeł i wypływów, są to jedynie dotychczas bliżej poznane przykłady dwuwymiarowych ruchów statecznych cieczy lepkiej. Wobec tego sądzę, że podane niżej inne przykłady takich ruchów mogą być interesujące, zwłaszcza że są to najprostsze typy ruchów sięgających do nieskończoności.

Podamy przedewszystkiem pewną formę ogólnego rozwiązania równań (1) w razie ruchu dwuwymiarowego. Wskutek nieściśliwości cieczy można je napisać w postaci:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{4}$$

gdzie ζ oznacza podwójną prędkość wirowania:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

i spełnia równanie:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0\,. \tag{5}$$

Linie równego ciśnienia i równego wirowania tworzą zatem system ortogonalny:

$$\frac{1}{\mu}p + i\zeta = f(x+iy).$$

Oznaczywszy tym sposobem ciśnienie p, możnaby do dalszego całkowania równań (1) użyć metod analogicznych do metod teoryi potencyału. Rozwiązanie przyjmuje jednak formę najdogodniejszą przez wprowadzenie funkcyi prądu ψ zapomocą relacyi:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y};\; v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

---

1) Phil. Mag. 36, p. 354 (1893).

i przez użycie zmiennych niezależnych:

$$\alpha = x + i y; \ \beta = x - i y.$$

Wynikają z tego relacye:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}; \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right); \ \zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta}. \tag{7}$$

Funkcya ψ musi zadość uczynić równaniu różniczkowemu, wynikającemu z (5):

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2 \, \partial \beta^2} = 0 \tag{8}$$

którego ogólne rozwiązanie jest:

$$\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta). \tag{9}$$

Ponieważ zaś $\zeta = 4 \, [f_1'(\beta) + f_2'(\alpha)]$ musi być rzeczywiste, więc jeżeli przez znak f odtąd oznaczamy funkcyę rzeczywistą, musimy mieć jedno z dwóch rozwiązań typu:

$$\text{A)} \ \psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) \qquad \text{B)} \ \psi = \frac{1}{i}\Big[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)\Big] \tag{10}$$

$$\zeta = 4 \, [f'(\alpha) + f'(\beta)] \qquad \zeta = 4 \, \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{i}$$

$$p = 4 \, \mu \, \frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i} \qquad p = 4 \, \mu \, [f'(\alpha) + f'(\beta)]$$

albo też sumę dwóch takich funkcyi, a ponadto superponuje się jeszcze wskutek składników f_3, f_4, zwykły ruch potencyalny, wyrażony przez

$$\text{C)} \ \psi = g(\alpha) + g(\beta) \ \text{ lub } \ \text{D)} \ \psi = \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i}. \tag{11}$$

Ścianami naczynia mogą być owe powierzchnie, gdzie prędkość $u = v = 0$, a równanie ich można wyrazić w formie

$$u^2 + v^2 = 4 \, \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \, \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0. \tag{12}$$

Nie znamy jednak sposobu, jak do danego kształtu ścian dobrać odpowiednie rozwiązanie, a nawet nie wiemy czy ruch stateczny przy dowolnym kształcie ich jest możliwy. Tyle wiemy, że

funkcye f, g nie mogą posiadać w ogólności punktów osobliwych w przestrzeni cieczą wypełnionej, jeżeli ruch ma być skończony; będą one leżeć w ścianach lub w przestrzeni poza niemi.

§ 7. Kwestye te bliżej zbadamy w razie najprostszym, t. j. ściany płaskiej $y = 0$. Przyjmiemy najprzód formę (10 B) z odpowiednim ruchem potencyalnym (11 D), z czego wynikają wyrażenia dla prędkości:

$$(13) \quad u = \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) - f(\alpha) - f(\beta) - g'(\alpha) - g'(\beta)$$

$$v = \frac{1}{i}\left[\alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) + g'(\alpha) - g'(\beta)\right].$$

Podstawiając tutaj $u = v = 0$ dla argumentów $\alpha = \beta$ (to znaczy $y = 0$) dochodzimy do relacyi:

$$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha),$$

wskutek której owe równania (13) zamieniają się na

$$(14) \quad \begin{aligned} u &= (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right] \\ v &= \frac{1}{i}\left[2\left(f(\beta) - f(\alpha)\right) + (\alpha - \beta)\left(f'(\alpha) + f'(\beta)\right)\right]. \end{aligned}$$

Biorąc zatem jakąbądź funkcyę jednowartościową, np. $f(\alpha) = \alpha^n$ (dla n całkowitego) otrzymujemy ruch zgodny z warunkiem spoczynku przy ścianie $y = 0$, ale zwykle takie ruchy jako nieskończone niewiele przedstawiają interesu.

Obierzmy jednak:

$$(15) \quad -f(\alpha) = \frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2 - c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha + c)(\alpha - c)} = \frac{1}{4}\sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}}$$

gdzie r_1, r_2, θ_1, θ_2, oznaczają promienie wodzące od punktów $\pm c$ do punktu α i kąty przez nie utworzone z osią X, podczas gdy r, θ, będzie oznaczać analogiczne wielkości względem punktu 0.

To wprawdzie nie jest funkcya jednowartościowa, ale obliczywszy prędkości według (14) [1]:

---

[1]) Przyczem użyto transformacyi:

$$\sqrt{\alpha^2 - c^2} - \sqrt{\beta^2 - c^2} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} =$$

$$= (\alpha + \beta)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}}\right] + c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - c^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}\right].$$

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$v = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + \frac{c^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \tag{16}$$

przekonywamy się, że one istotnie znikają dla ściany $y = 0$ w części sięgającej od $x = +1$ aż $x = \infty$ i w części od $x = -1$ aż do $x = -\infty$; a przyjmując tę ścianę za nieprzekraczalną przegrodę czynimy funkcyę $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ jednowartościową.

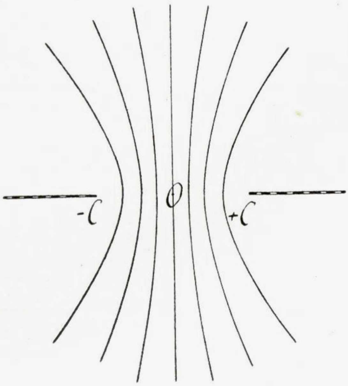


Fig. 1.

Równania (10) dają wartość wirowania:

$$\zeta = \frac{1}{i}\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}}\right\} = \frac{2r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \tag{17}$$

a ciśnienie otrzymujemy jako funkcyę sprzężoną:

$$p = -\mu \frac{2r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right). \tag{18}$$

W nieskończonej odległości będzie $\lim_{r=\infty}\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = 0$ dla dodatnich y, zaś $\lim_{r=\infty}\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = \pi$ dla ujemnych y, a wskutek tego: $\lim_{r=\infty} \zeta = 0$; $\lim_{r=\infty} p = \pm 2\mu$; zależnie czy chodzi o ciśnie-

nie w punkcie poniżej czy powyżej przegrody. Różnica ciśnienia po obu jej stronach, powodująca ruch, wynosi zatem 4 μ jednostek; dla innej wartości tej różnicy ciśnienia należałoby tylko wszystkie prędkości w odpowiednim stosunku zmienić.

Prędkość między punktami $\pm c$ wynosi $v=\sqrt{c^2-x^2}$, przeto cała ilość cieczy przez ten otwór wypływająca:

$$F=2\int_0^c\sqrt{c^2-x^2}\,dx=\frac{c^2\pi}{2} \tag{19}$$

czyli w zależności od czynnej różnicy ciśnienia $\triangle p$: $F=\frac{c^2\pi}{8\mu}\triangle p$.

Jako ruch skończony jest to jedyny ruch skończony możliwy przy istnieniu rożnicy ciśnienia z dwóch stron ściany zaopatrzonej otworem; linie prądu (dla równych przyrostów wielkości ψ), wykazujące, w jaki sposób przepływ cieczy się odbywa, są przedstawione na figurze 1.

Do obliczenia ich użyto równania wynikającego z (10, 11) przy wprowadzeniu funkcyi f i g:

$$\psi=r\sqrt{r_1 r_2}\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)+c^2 arctg\frac{r\sin\theta+\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta+\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

§ 8. Dyskusyę tę trzeba jeszcze uzupełnić rozważaniem rozkładu prędkości w nieskończonej odległości i w otoczeniu punktów $\pm c$.

Dla punktów we wielkiem oddaleniu r można stawić:

$$\lim\left[\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]=\lim\left\{-\frac{c^2}{2}\,\frac{\frac{\theta_1-\theta}{c}-\frac{\theta-\theta_2}{c}}{c}\right\}= \tag{20}$$

$$=-\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=-\frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\,.$$

Zważywszy, że to jest bardzo małą wielkością, można zatem równania (16) uprościć:

$$\begin{aligned}\lim u&=\frac{c^2\sin^2\theta\cos\theta}{r}=\frac{c^2xy^2}{r^4}\\ \lim v&=\frac{c^2\sin^3\theta}{r}=\frac{c^2y^3}{r^4}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

W większej odległości od otworu ciecz płynie zatem w kierunku promieni, z prędkością

$$V = \frac{c^2}{r} \sin^2 \theta \, .$$

Można te równania (21) także uważać za określenie wypływu z bardzo małego źródła (o szerokości $2\,c$) w ścianie $y = 0$, a są one identyczne z rozwiązaniem otrzymanem przez Rayleigha, dla wpływu przez otwór nieskończenie mały na obwodzie koła (wzór 22′ loc. cit.), o ile chodzi o najbliższe otoczenie tego źródła.

To samo rozwiązanie można otrzymać bezpośrednio z równań (14) podstawiając: $f(\alpha) = \frac{c^2}{8} \frac{1}{\alpha}$, ale ten sposób nie objaśnia zachowania się cieczy w blizkości punktu osobliwego $r = 0$. Wynika z tego równocześnie funkcya prądu:

$$\psi = \frac{c^2}{4} (2\,\theta - \sin 2\,\theta)$$

i wielkości ciśnienia i wirowania:

$$\zeta = -c^2 \cdot \frac{\sin 2\,\theta}{r^2}$$

$$p = -c^2 \frac{\cos 2\,\theta}{r^2} \, , \qquad (22)$$

które również z równań (17, 18) można otrzymać zapomocą rozwinięcia

$$\lim \log \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 (\log r)}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{2} \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{r^2} \, . \qquad (23)$$

Przyjmując pewien rozkład źródeł i wpływów na ścianie $y = 0$ otrzymałoby się wypadkowy ruch, zgodny z warunkiem spoczynku przy pozostających częściach ściany, przez sumacyę (czyli całkowanie) wyrażeń w rodzaju (21), zaopatrzonych odpowiedniemi stałemi.

§ 9. Ażeby zbadać rodzaj ruchu w otoczeniu bezpośredniem punktu $+c$, rozwińmy funkcyę (16) przy użyciu relacyi:

$$r \sin \theta = r_1 \sin \theta_1 ; \quad r \cos \theta = c + r_1 \cos \theta_1 \, .$$

Tak otrzymujemy, pomijając wielkości wyższych rzędów:

$$(24)\qquad \begin{aligned} u &= \sqrt{2c}\sqrt{r_1}\,\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} \\ v &= \sqrt{2c}\sqrt{r_1}\,\sin^3\frac{\theta_1}{2}\,. \end{aligned}$$

co dowodzi, że prędkości przy „matematycznie ostrych“ krawędziach $\pm c$ nie są nieskończone, jakby na pozór sądzić można z (16), i jakby istotnie być musiało w cieczy idealnej, lecz że przeciwnie są równe zeru. Jest to wynik doniosły dla teoryi Helmholtza o powstawaniu strumieni cieczy [1]).

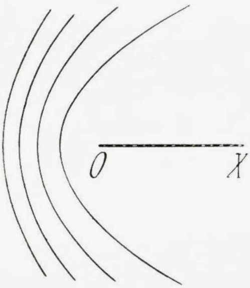


Fig. 2.

To samo rozwiązanie (24) otrzymuje się z równań ogólnych (14) podstawiając: $f(\alpha) = -\frac{1}{4}\sqrt{2c\alpha}$ i przedstawia ono przepływ cieczy nieskończonej naokoło krawędzi matematycznie ostrej (fig. 2).

Linie prądu wynikają z funkcyi prądu ψ oznaczonej według (10, 11)

$$(25)\qquad \psi = -\frac{2}{3}\sqrt{2c}\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right]^3 .$$

jako parabole współogniskowe z punktem $+c$, a z tych samych równań wypływa wirowanie i ciśnienie:

$$(26)\qquad \zeta = -\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}; \quad p = -\mu\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} .$$

W punkcie c funkcye te są nieokreślone, a znikają w nieskończoności.

---

[1]) Patrz: Helmholtz, Ges. Abhandl. I, p. 146; Smoluchowski, Rozpr. 44, str. 144 (1904).

§ 10. Na przykładach §§ 7, 8, 9. można łatwo pokazać, że istnieją także inne ruchy zadość czyniące tym samym warunkom granicznym, t. j. danemu kształtowi ścian i danemu rozkładowi ciśnienia w nieskończoności, ale pomiędzy nimi tylko ów jeden ruch (16) będzie skończony.

Przyjmiemy n. p. formę (10 A) z odpowiednim ruchem (11 C) superponowanym i postąpimy analogicznie jak w § 7. Znajdujemy tak rozwiązanie:

$$\begin{aligned} u &= i\,(2\,[f(\alpha) - f(\beta)] + (\alpha - \beta)\,[f'(\alpha) + f'(\beta)] \\ v &= (\beta - \alpha)\,[f'(\alpha) - f'(\beta)], \end{aligned} \qquad (27)$$

które przynajmniej dla funkcyi jednowartościowych spełnia warunki $u = v = 0$ przy ścianie $y = 0$.

Podstawiając tutaj: $f = \frac{1}{4}\sqrt{\alpha^2 - c^2}$, otrzymujemy:

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \qquad (28)$$

$$v = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$p = 2\mu \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right); \quad \zeta = 2\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2} \sin\theta \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

Jest to ruch spełniający warunek: $\lim\limits_{\infty} p = 0$, i możnaby go zatem superponować nad ruch (16), nie zmieniając ciśnienia w nie-

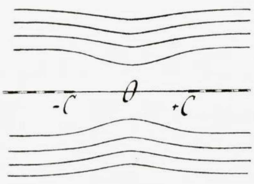


Fig. 3.

skończoności, ale należy on do klasy ruchów nieskończonych, gdyż $\lim\limits_{\infty} u = -2y$. Odpowiada on przepływowi wzdłuż ściany zaopatrzonej otworem (fig. 3).

§ 11. Jeżeli podobnie jak w § 9, zbadamy rodzaj tego ruchu w otoczeniu punktu $\alpha = +c$, otrzymamy wzory:

$$(29) \qquad u = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad v = -\sqrt{r}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$p = -\frac{\mu}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\psi = 2\sqrt{r^3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

które także bezpośrednio z (27) otrzymać można przez podstawienie $f = \frac{1}{4}\sqrt{\alpha}$. Przedstawia to przepływ styczny cieczy wzdłuż krawędzi ostro zakończonej; fig. (4).

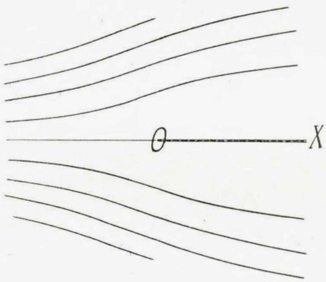


Fig. 4.

Superponując to rozwiązanie ponad (24), pomnożywszy je przez odpowiednie stałe, otrzymałoby się wzory reprezentujące przepływ cieczy koło ostrej krawędzi, z dowolną składową styczną i normalną.

Tak przedstawia fig. (5) ruch określony przez:

$$(30) \qquad \psi = 2\sqrt{r^3}\sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

§ 12. Ażeby przeciwnie zbadać ruch (29) w wielkiej odległości, możemy użyć tych samych rozwinięć jak w § 8. Opuszczając wtedy składnik: $u = -2y$; $v = 0$; jako obojętny dla nas dodatek ruchu potencyalnego, otrzymujemy wzory:

$$(31) \qquad u = \frac{c^2}{2r}\sin 2\theta\cos\theta \qquad v = \frac{c^2}{2r}\sin 2\theta\sin\theta$$

$$p = \frac{c^2\mu}{r^2}\sin 2\theta \qquad \zeta = -\frac{c^2}{r^2}\cos 2\theta$$

które także wypływają bezpośrednio z wzoru (27) przez podstawienie $f(\alpha) = \frac{c^2}{8\alpha}$.

Przedstawiają one ruch w obrębie pół przestrzeni, powodowany istnieniem prądu stycznego na miejscu jednego elementu ściany w punkcie 0. Z drugiej strony można to też interpretować jako ruch wzbudzony w przestrzeni zawartej między ścianami prostopadłemi X, Y wskutek obecności źródła o natężeniu $\frac{c^2}{2}$ w punkcie ich przecięcia.

Superponując [1]) zaś ten ruch nad ruch określony równaniami

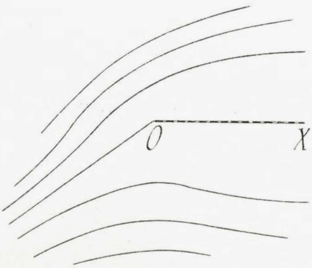


Fig. 5.

(21) otrzymuje się wypływ z źródła do przestrzeni między ścianami stykającemi się pod dowolnym kątem (mniejszym od $\frac{\pi}{2}$) $\alpha = arctg\ a$:

$$u = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[\cos\theta - a\sin\theta\right] \tag{32}$$

$$v = \frac{\sin^2\theta}{r}\left[\cos\theta - a\sin\theta\right].$$

Prędkość wypadkowa skierowana wzdłuż promieni wodzących, wynosi:

[1]) Z warunków ciągłości prędkości wynika następująca reguła dla nakładania ruchów składowych: Ogólnie można superponować ruchy odbywające się wobec ścian stałych o jednakowym kształcie. Także ruchy o różnym kształcie ścian można nakładać na siebie, ale tylko jeżeli przestrzeń zajęta cieczą dla ruchu wypadkowego nie zawiera tych części, w których się znajdowały ściany jednego tylko z ruchów składowych.

$$V = \frac{\sin\theta \sin(\alpha - \theta)}{r \sin\alpha} .$$

Zauważę jeszcze, że ruch (31), tak samo jak (21) jest zawarty, jako forma graniczna, między ruchami badanymi przez Rayleigha; wynika on z wzoru (33′) loc. cit., jeżeli promień koła, w obrębie którego ruch się ma odbywać, stanie się nieskończenie wielki.

Z drugiej strony zajmujące jest porównanie ruchów (16) (24) z odpowiednimi ruchami o symetryi osiowej, zbadanymi przez Sampsona [1]). Autor ten dowiódł, że w razie ściany płaskiej zaopatrzonej otworem kołowym, możliwy jest ruch, którego linie prądu (w przekroju osiowym) są hiperbolami współogniskowemi. Funkcya prądu jest określona przez:

(33) $$\psi = \frac{V c^2 q^3}{3} ,$$

gdzie c oznacza promień otworu, V prędkość w jego środku, q spółrzędną hiperboliczną punktu x, y, to znaczy pierwiastek hiperboliczny równania dla λ:

(34) $$\frac{x^2}{1 - \lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = c^2 .$$

Otóż w bezpośredniem otoczeniu krawędzi otworu, to jest w odstępach małych w porównaniu z jego średnicą, hiperbole degenerują w parabole, i ruch (33) okazuje się istotnie identycznym z ruchem badanym w § 9. Przeciwnie, dla bardzo wielkiej odległości od otworu otrzymujemy z równania Sampsona wzory dla trzywymiarowego wypływu z źródła w ścianie płaskiej; wynik jest do pewnego stopnia analogiczny do § 8, gdyż ciecz tak samo jak tam wypływa w kierunku promieni wodzących z prędkością proporcyonalną do $\sin^2\theta$, ale odwrotnie proporcyonalną do kwadratu odległości r; rozkład ciśnienia jest określony wzorem:

(35) $$p = \frac{c\mu}{r^3}\left(\frac{3y^2}{r^2} - 1\right) .$$

[1]) Phil. Trans. Vol. 182, p. 449.

str. 145—155). — A. Witkowski: O rozszerzalności wodoru (5 ryc. i 2 tabl.) (str. 156—193). — K. Olszewski: Dalsze próby skroplenia helu (str. 194—198) — K. Olszewski: Przyczynek do oznaczania punktu krytycznego wodoru (str. 199—205). — K. Zakrzewski i K. Kraft: O kierunkach głównych w cieczach, łamiących światło podwójnie wskutek ruchu (11 ryc.) (str. 206—220). — Tadeusz Godlewski: O niektórych promieniotwórczych własnościach uranu (str. 221—237). — W. Baczyński i St. Niementowski: Dwuoksyakrydon i jego pochodne (str. 238—255). — L. Marchlewski i Wł. Matejko: Studya nad biksyną. Część I. (1 tabl.) (str. 256—264). — W. Dziewulski: Wiekowe perturbacye Marsa w ruchu Erosa (str. 265—310). — Sprostowanie do pracy S. Zaremby: Ogólne rozwiązanie zagadnienia Fouriera (str. 311).

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności.
Serya III. Tom 6. Dział A.

Ogólnego zbioru tom 46 A.

M. Sabat: Wpływ promieni radu na przewodnictwo elektryczne elektrolitów (str. 1—6). — G. Gittelmacher-Wilenko: O hippokoprosterynach (str. 7—10). — E. Romer: Epoka lodowa na Świdowcu (3 tabl., i 8 ryc., str. 11—82). — S. Niementowski: Oksychinakrydyna i florchinyl (str. 83—98). — S. Niementowski: O azoacetanilidzie (str. 99—102). — W. Friedberg: Zagłębie mioceńskie Rzeszowa. Część II (1 mapka oryentacyjna, str. 103—128). — M. Smoluchowski: O drodze średniej cząsteczek gazu i o związku jej z teoryą dyfuzyi (str. 129—140). — K. Ciesielski: O kilku pochodnych cyanku p-ksylylu (str. 141—146). — E. Blumenfeld: O orto-tolyloetylaminie (str. 147—152). — J. Latkowski: O wpływie białka surowicy krwi na jej punkt marznięcia (str. 153—164). — W. Arnold: O nowej reakcyi nitroprusydkowej moczu (str. 165—170). — A. Ehrenpreis: O działaniu żelazacyanku potasowego na sole dwuazoniowe (str. 171—180. — W. Żłobicki: Pomiary napięcia powierzchniowego metodą małych baniek (21 ryc., str. 181—132). — J. Kozak: O niektórych pochodnych orto- i parabutylotoluoli trzeciorzędnych (str. 232—242). — T. Nowosielski: O kondenzacyi piperylu z aldehydem benzoesowym i amoniakiem (str. 243—250). — Z. Weyberg: Kryształy klasy bisfenoidu tetragonalnego (1 tabl., str. 251—256). — M. Smoluchowski: Zarys teoryi kinetycznej ruchów Browna i roztworów mętnych (str. 257—282). — L. Bruner: Przyczynek do teoryi działania siarkowodoru na sole metali ciężkich (str. 283—290). — J. Merunowicz i J. Zaleski: Redukcya pochodnych barwika krwi zapomocą Zn i HCl (str. 291—294). — J. Morozewicz: O metodzie oddzielania potasu i sodu w postaci chloroplatynianów (str. 295—302). — Errata (str. 303).

Rozprawy Wydziału mat.-przyrod. wychodzą od r. 1901 w dwóch działach:
[A. (nauki matematyczno-fizyczne), B. (nauki biologiczne).

Każdy dział będzie wychodzić w zeszytach, obejmujących o ile możności cały materyał posiedzenia miesięcznego Wydziału (których jest 10 do roku), w całych arkuszach druku z ciągłą paginacyą. Z końcem roku dołączona zostanie do ostatniego zeszytu każdego działu karta tytułowa i spis prac w tomie zawartych. Bez względu na możliwą ilość materyału, zawartego w tomie, ilość rycin lub tablic, cena tomu z działu A. wynosić będzie tylko 8 kor., a z działu B. 10 kor. rocznie — w Królestwie Polskiem dział A. 3 rs., a dział B. 4 rs. rocznie.

Skład główny; na Galicyę: — Księgarnia Spółki wydawniczej w Krakowie: na Królestwo Polskie: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie.